

Квантна теорија: Увод и принципи

Во ова поглавје се воведуваат некои од основните принципи на квантната механика. Првин се дава преглед на експерименталните резултати што довеле до надминување на концептите на класичната физика. Овие експерименти довеле до заклучок дека честичките не може да имаат произволна енергија и дека класичните концепти на „честичка“ и „бран“ се заемно измешани. Надминувањето на класичната механика инспирирало поставување на нови концепти и довело до формулирањето на квантната механика. Во квантната механика сите својства на системот се изразени преку бранова функција која се добива со решавање на Шредингеровата равенка. Ќе видиме и како да се интерпретира брановата функција. На крајот, ќе воведеме некои од техниките на квантната механика преку операторите и ќе видиме дека тие доведуваат до принципот на неопределеност, едно од најимпресивните отстапувања од класичната механика.

Своевремено се верувало дека движењето на атомите и субатомските честички може да се прикаже со примена на **класичната механика**, на законите за движење воведени во седумнаесеттиот век од Исак Њутн (Isaac Newton) затоа што овие закони биле многу успешни при објаснувањето на движењето на предметите од секојдневието и на планетите. Меѓутоа, кон крајот на деветнаесеттиот век, се насобрал експериментален материјал што покажувал дека класичната механика затаила кога била применета на честички толку мали како електроните и било потребно време до 1920-тите (20-тите години од XX-от век; заб. прев.) за да се откријат соодветни концепти и равенки за нивен опис (на честичките, заб. прев.). Концептите на оваа нова механика, наречена **квантна механика**, се опишани во ова поглавје и ќе бидат применувани во остатокот од текстот.

Почетоци на квантната механика

Основните принципи на класичната механика се прикажани во *Додаток 2*. Накратко, тие покажуваат дека класичната физика (1) претскажува прецизни траектории за честичките, со прецизно определени положби и импулси во секој момент, и (2) дозволува транслационите, ротационите и вибрационите начини на движење да бидат ексцитирани до произволно голема енергија, едноставно со контрола врз силите што се применети. Овие заклучоци се во согласност со секојдневното искуство. Секојдневното искуство, меѓутоа, не се проширува врз индивидуални атоми и внимателно изведени експерименти од тип што е опишан подолу покажале дека класичната механика затајува кога ќе се примени при размена на многу мали енергии и на објекти со многу мала маса.

Ќе ги испитуваме и својствата на светлината. Во класичната физика, светлината е опишана како електромагнетно зрачење кое се подразбира преку **електромагнетното поле**, осцилаторно електрично и магнетно нарушување што се шири како хармониски бран низ празниот простор, вакуумот. Ваквите бранови се добиваат со забрзување на електричен полнеж, како при осцилаторно движење на електроните во антената на радио предавателот. Бранот се шири со константна брзина наречена *брзина на светлината*, c која изнесува околу $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Како што сугерира самото име, електромагнетното поле

Почетоци на квантната механика

- 8.1** Затајувањата на класичната физика
- 8.2** Дуализам бран–честичка
- 18.1** Влијание врз биологијата: Електронска микроскопија

Динамика на микроскопски системи

- 8.3** Шредингеровата равенка
- 8.4** Борнова интерпретација на брановата функција

Квантномеханички принципи

- 8.5** Информации во брановата функција
- 8.6** Принцип на неопределеност
- 8.7** Постулати на квантната механика

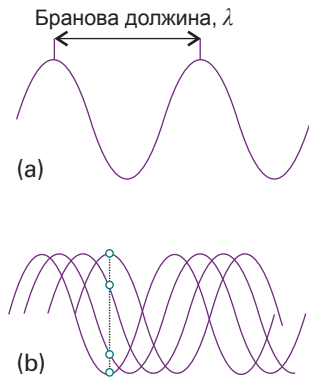
Листа на основните идеи

Прочитај дополнително

Прашања за дискусија

Задачи

Проблеми



Слика 8.1 (а) Брановата должина, λ , на еден бран е растојанието од максимум до максимум.* (б) Бранот е прикажан како се шири кон десно, со брзина c . Во дадена положба, моментната амплитуда на бранот се менува во целосен циклус (четирите точки покажуваат половина циклус). Фреквенцијата, ν , е бројот на циклуси во секунда што се појавуваат во дадена точка.

Коментар 8.1

Хармониските бранови се бранови чии поместувања може да се изразат преку синусни или косинусни функции. Физиката на брановите е прикажана во *Додаток 3*.

има две компоненти, **електрично поле** што дејствува на наелектризирани честички (стационарни или подвижни) и **магнетно поле** што дејствува само на подвижни наелектризирани честички. Електромагнетното поле се карактеризира со **бранова должина**, λ (ламбда), растојание меѓу соседните пикови (максимуми) на бранот* и **фреквенција**, ν (ни), бројот на пати во секунда кога отклонувањето (елонгацијата) на фиксна точка се враќа на првичната вредност (Сл. 8). Фреквенцијата се мери во *херци*, каде $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$. Брановата должина и фреквенцијата на еден електромагнетен бран се поврзани со

$$\lambda \nu = c \quad (8.1)$$

Според тоа, колку е пократка брановата должина, толку е повисока фреквенцијата. Својствата на бранот се определени и со задавање на **брановиот број**, $\tilde{\nu}$ (ни тилда), на зрачењето каде

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} \quad [8.2]$$

Брановите броеви вообичаено се изразуваат во реципрочни центиметри (cm^{-1}).

На Сл. 8.2 е сумиран **електромагнетниот спектар**, описот и класификацијата на електромагнетното поле според фреквенцијата и брановата должина. Белата светлина е смеса од електромагнетно зрачење со бранови должини во областа од околу 380 nm до околу 700 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). Очите ги разликуваат различните бранови должини на зрачењето во оваа област како различни бои, така што може да се каже дека белата светлина е смеса на светлини со сите различни бои.

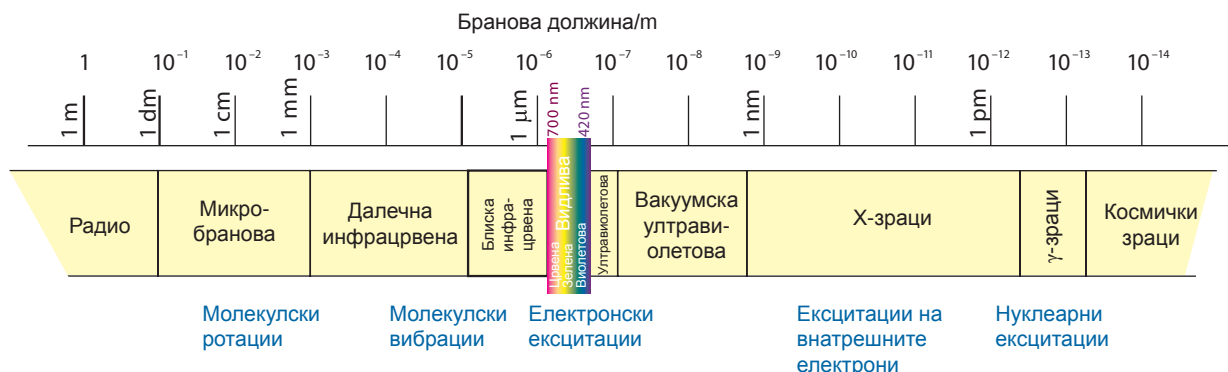
Брановиот модел е недостатен за опишување на сите својства на зрачењето. Така, токму како што нашето сфаќање за честичките (особено малите честички) треба да се измени, треба да се развие и нов поглед за светлината.

8.1 Затајувањата на класичната физика

Во овој оддел ќе бидат сумирани експерименталните сознанија што покажале дека неколку концепти на класичната механика се неодржливи. Поконкретно, ќе биде покажано дека истражувањата на зрачењето емитирано од жешки тела, на топлинските капацитети и на атомските и молекулските спектри укажуваат дека системите може да примаат енергија само во дискретни количества.

(а) Зрачење на црно тело

Жежок предмет емитира електромагнетно зрачење. При високи температури, значителен дел од зрачењето е во видливата област на спектарот и повисок е уделот на сина



Слика 8.2 Електромагнетен спектар и класификација на спектралните области.

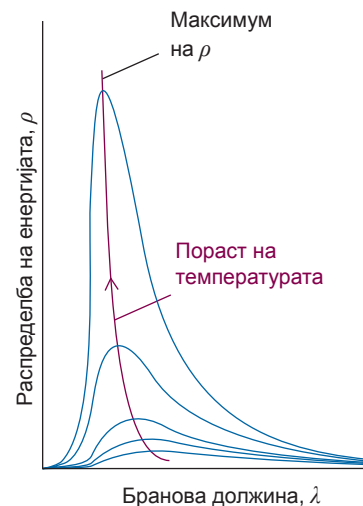
* Поточно е ако се каже дека бранова должина е најкраткото растојание меѓу две точки што осцилираат во фаза (заб. прев.).

светлина со кратки бранови должини што се создава при пораст на температурата. Ваквото однесување се забележува кога железна прачка загреана до црвено усвитување станува бело-усвитувана при натамошно загревање. Зависноста е илустрирана на Сл. 8.3 која покажува на кој начин излачената енергија зависи, при неколку температури, од брановата должина. Кривите се однесуваат на идеален емитер наречен **црно тело** (кај нас вообичаен термин е **апсолутно црно тело**; заб. прев.) којшто е објект способен униформно* да ги емитира и апсорбира сите фреквенции на зрачењето. Добра апроксимација за црно тело е дупче во празен сад што е одржуван при константна температура, затоа што било какво зрачење што излегува од дупчето веќе било апсорбирано и реемитирано внатре толку многу пати што дошло во термичка рамнотежа со сидовите (Сл. 8.4).

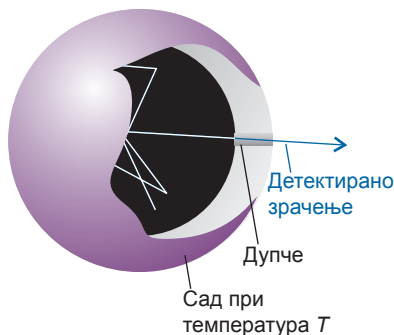
Објаснението за зрачењето на црно тело било крупен предизвик за научниците од деветнаесеттиот век и на крајот е најдено дека објаснението е надвор од можностите на класичната физика. Физичарот Рејли (Џон Вилијам Страт, подоцна Lord Rayleigh) го испитувал теориски од класична гледна точка и електромагнетното поле го разгледувал како колекција од осцилатори со сите можни фреквенции. Тој го сметал присуството на зрачење со фреквенција ν (и, според тоа со бранова должина $\lambda = c/\nu$) како знак дека електромагнетниот осцилатор со таква фреквенција е ексцитиран (Сл. 8.5). Рејли го употребил принципот за еквипартиција (Оддел 2.2) за да ја пресмета средната енергија на секој осцилатор како kT . Тогаш, со мала помош од Џејмс Џинс (James Jeans), тој го формулирал **Рејли–Џинсовиот закон** (погледни во *Прочитай дојдлийтелно* за неговото објаснение/изведување):

$$d\mathcal{E} = \rho d\lambda \quad \rho = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} \quad (8.3)$$

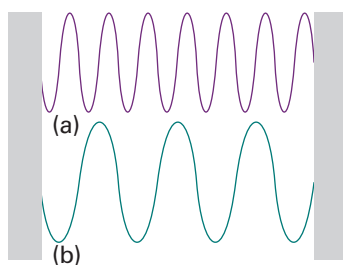
каде ρ (ρ), **густината на состојбите**, е константа на пропорционалноста меѓу $d\lambda$ и густината на енергијата, $d\mathcal{E}$, во областа на бранови должини помеѓу λ и $\lambda + d\lambda$, k е Болцмановата константа ($k = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$). Единиците на ρ се обично џули на метар⁴ (J m^{-4}), при што се добива густината на енергијата $d\mathcal{E}$ во џули на кубен метар (J m^{-3}), кога густината k се помножи со интервалот на бранови должини $d\lambda$, изразени во метри. Голема густина на состојбите при бранова должина λ значи, едноставно, дека голем дел од енергијата е поврзан со брановите должини помеѓу λ и $\lambda + d\lambda$. Вкупната густина на енергијата (во џули на кубен метар) во дел од просторот се добива со интегрирање на рав. 8.3 по сите бранови должини меѓу нула и бесконечност, а вкупната енергија (во џули) во истиот дел се добива со множење на таа вкупна густина на енергијата со волуменот на делот од просторот.



Слика 8.3 Распределбата на енергијата во шуплина од црно тело, при неколку температури. Забележи како расте густината на енергијата во областа на кратки бранови должини, при пораст на температурата и како максимумот се поместува кон пократки бранови должини. Вкупната густина на енергијата (површината под кривата) расте со растењето на температурата (како T^4).

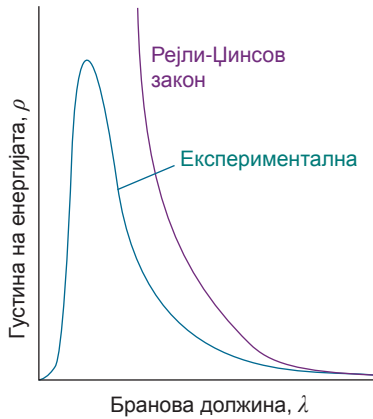


Слика 8.4 Експерименталниот приказ на црно тело е дупче во инаку затворен сад. Зрачењето се рефлектира многу пати внатре во садот, па доаѓа до термичка рамнотежа со сидовите при температура T . Зрачењето што излегува низ дупчето е карактеристично за (идентично со; заб. прев.) зрачењето внатре во садот.

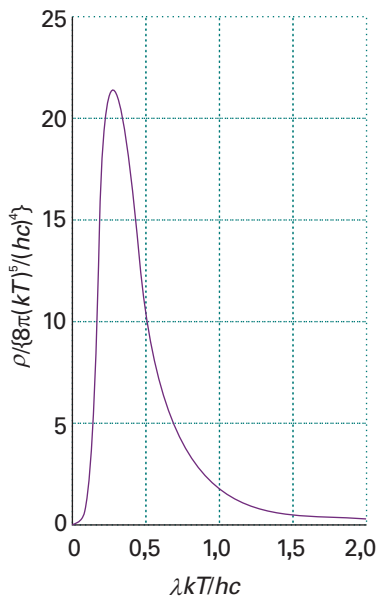


Слика 8.5 Може да се смета дека електромагнетниот вакуум е способен да ги поддржува осцилациите на електромагнетното поле. Кога високофреквентен (краткобранов) осцилатор (a) се ексцитира, присутна е соодветната фреквенција на зрачењето. Присуството на нискофреквентно, долгобраново зрачење (b) означува дека е побуден осцилатор со соодветната фреквенција.

* Ова е, инаку, контрадикција. Ако идеалниот емитер зрачи „униформно“ (т.е. рамномерно), кривите што се добиваат би требало да бидат прави, паралелни со апсисната оска (заб. прев.).



Слика 8.6 Реели–Динсовиот закон (рав. 8.3) предвидува бесконечно голема густина на енергијата при кратки бранови должини. Оваа доближување до бесконечност е наречено ултравиолетова катастрофа.



Слика 8.7 Планковската распределба (рав. 8.5) многу добро се сложува со експериментално определената распределба на зрачењето од црно тело. Планковата хипотеза за квантирање фактички ги гасне придонесите од осцилаторите со високи фреквенции, кратки бранови должини. Распределбата се совпаѓа со реели-динсовската распределба при долги бранови должини.



Истражувачка активност Прикажи ја планковската распределба при неколку температури и потврди дека рав. 8.5 го предвидува однесувањето што е сумирано на Сл. 8.2.

За жал (на Реели, на Динс, а и на класичната физика), иако Реели–Динсовиот закон е сосема успешен при долги бранови должини (ниски фреквенции), тој неславно пропаѓа при кратки бранови должини (високи фреквенции). Така, кога λ се намалува, ρ би требало да расте без притоа да помине низ максимум (Сл. 8.6). Равенката, според тоа, предвидува дека осцилатори со многу кратки бранови должини (што соодветствуваат на ултравиолетово зрачење, рендгенски зраци, па дури и γ -зраци) се силно ексцитирани дури и на собна температура. Овој апсурден резултат којшто имплицира дека големи количества енергија се зрачат во високофреквентната област на електромагнетниот спектар, е наречен **ултравиолетова катастрофа**. Според класичната физика, дури и студени објекти треба да зрачат во видливата и ултравиолетовата област, па објектите би морало да светат во темница; всушност, темница не би имало.

(b) Планковска распределба

Германскиот физичар Макс Планк (Max Planck) го испитувал зрачењето на црно тело од гледна точка на термодинамиката. Во 1900 тој открил дека експерименталните резултати може да се објаснат преку претпоставката дека енергијата на секој електромагнетен осцилатор е ограничена на дискретни вредности и не може да се менува по желба. Ваквиот предлог е целосно спротивен на гледиштата на класичната физика (врз кои се базирал принципот на екипартиција употребен од Реели), според кои сите можни енергии се дозволени. Ограничението на енергиите на дискретни вредности е наречено **квантирање на енергијата**. Конкретно, Планк открил дека тој може да ја протолкува забележената распределба на енергијата, доколку се претпостави дека дозволените енергии на еден електромагнетен осцилатор со фреквенција ν се целобројни производи од $h\nu$:

$$E = nh\nu \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.4)$$

каде h е фундаментална константа денес позната како **Планкова константа**. Врз основа на оваа претпоставка, Планк можел да ја изведе **планковската распределба**:

$$dE = \rho d\lambda \quad \rho = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} \quad (8.5)$$

(За референци кон изведувањето на овој израз, види во *Прочитај дојолнијелно*). Овој израз е во многу добра согласност со експерименталната крива (Сл. 8.7) и вредноста на h која во теоријата е неопределен параметар, може да се добие со варирање на вредноста на параметарот, додека да се добие најдобро совпаѓање. Денес усвоената вредност за h е $6,626 \times 10^{-34}$ J s.

Планковската распределба прилега на онаа од Реели–Динс (рав. 8.3), со исклучок на експоненцијалниот фактор во именителот кој е од клучно значење. За кратки бранови должини, $hc/\lambda kT \gg 1$ и $e^{hc/\lambda kT} \rightarrow \infty$ побргу одошто $\lambda^5 \rightarrow 0$ кога $\lambda \rightarrow 0$ или $\nu \rightarrow \infty$. Така, густината на енергијата се стреми кон нула при високи фреквенции, во согласност со експерименталните резултати. За долги бранови должини, $hc/\lambda kT \gg 1$, па именителот во планковската распределба може да се замени со

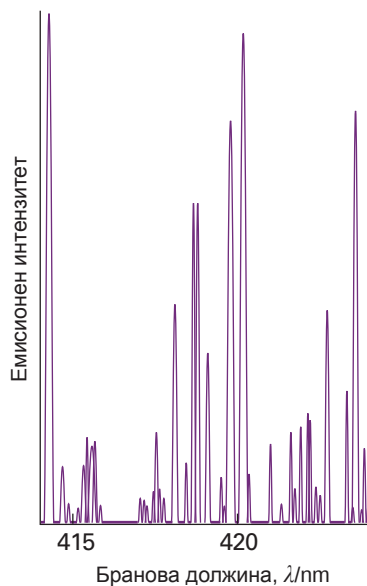
$$e^{hc/\lambda kT} - 1 = \left(1 + \frac{hc}{\lambda kT} + \dots \right) - 1 \approx \frac{hc}{\lambda kT}$$

Кога ваквата апроксимација ќе се замени во рав. 8.5, се гледа дека планковската распределба се сведува на Реели–Динсовиот закон.

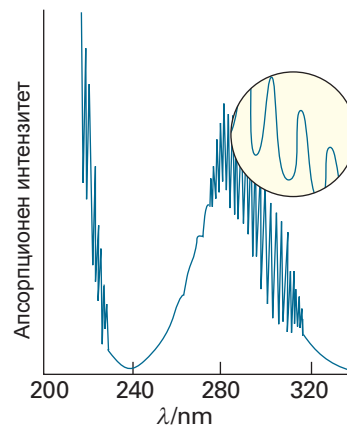
Многу е едноставно да се види зошто Планковиот пристап бил успешен, а оној на Реели не бил. Термалното движење на атомите во сидовите на црното тело ги ексцитира осцилаторите на електромагнетното поле. Според класичната механика, сите осцилатори во полето учествуваат еднакво во енергијата добиена од сидовите, па дури и највисоките фреквенции се ексцитирани. Експитацијата на осцилатори со многу висока фреквенција доведува до ултравиолетова катастрофа. Според Планковата хипотеза, пак, осцилаторите се ексцитираат само доколку може да примат енергија од најмалку $h\nu$. Оваа

(d) Атомски и молекулски спектри

Најсилниот доказ за квантирањето на енергијата доаѓа од **спектроскопијата**, детекција и анализа на електромагнетното зрачење што е апсорбирано, емитирано или расејано од некоја супстанца. Записот на интензитетот на светлина пропуштена или расејана од



Слика 8.10 Областа на спектарот на зрачење емитирано од ексцитирани атоми од железо се состои од зрачење во серија од дискретни бранови должини (или фреквенции).



Слика 8.11 Кога молекулата ја изменува својата состојба, до ова доаѓа по пат на апсорпција на зрачење при определени фреквенции. Овој спектар е дел од тоа, како резултат на електронски, вибрациони и ротациони ексцитации на молекулите од сулфур диоксидот (SO_2). Овој резултат сугерира дека молекулите може да поседуваат само дискретни енергии, а не произволно големи.

молекулите како функција од фреквенцијата (ν), брановата должина (λ) или брановиот број ($\tilde{\nu} = \nu/c$) е наречен **спектар** (од латинскиот збор за привидение)*.

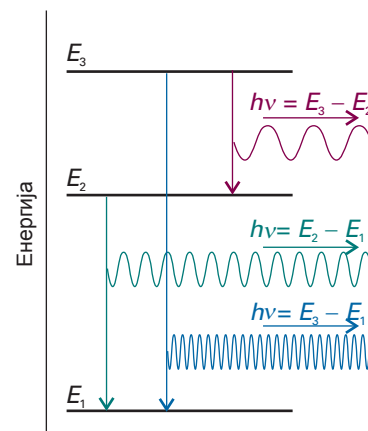
Типичен атомски спектар е прикажан на Сл. 8.10, а типичен молекулски спектар е прикажан на Сл. 8.11. Очигледната карактеристика на обата е дека зрачењето се емитира или апсорбира при серија дискретни фреквенции. Овој наод може да се разбере ако енергијата на атомите или молекулите е исто така ограничена на дискретни вредности, затоа што тогаш енергијата може да се отпушта или апсорбира само во дискретни количества (Сл. 8.12). Така, ако енергијата на еден атом се намали за ΔE , енергијата е одведена како зрачење со фреквенција ν , а во спектарот се појавува емисиона „линија“, како остар пик. Се вели дека молекулата извршила **спектроскопски премин**, промена на состојбата, кога **Боровиот услов за фреквенцијата**

$$\Delta E = h\nu \quad (8.10)$$

е исполнет. Принципите и примената на атомската спектроскопија ќе бидат разработени во Поглавје 10, а на молекулската во поглавјата 13–15.

8.2 Дуализам бран–честичка

Во оваа фаза утврдиме дека енергиите на електромагнетното поле и на осцилирачките атоми се квантирани. Во овој оддел ќе бидат презентирани експерименталните докази што довеле до ревизија на два други основни концепта што се однесуваат на природни феномени. Еден експеримент покажува дека електромагнетното зрачење – кое класичната физика го третира како брановидно – всушност покажува и својства на честички. Друг експеримент покажува дека електроните – кои класичната физика ги третира како честички – покажуваат и својства на бранови.



Слика 8.12 Спектроскопски премини, како оние погоре, може да се протолкуваат ако се претпостави дека молекулата емитира фотон при премин меѓу дискретни енергетски нивоа. Забележи дека високофреквентно зрачење се емитира кога енергетската промена е голема.

* Всушност, вистинското значење на spectrum е помисла, слика во душата (заб. прев.).

(а) Корпускуларен карактер на електромагнетното зрачење

Наодот дека електромагнетното зрачење со фреквенција ν може да поседува само енергии од $0h\nu$, $h\nu$, $2h\nu$, ... сугерира дека тоа може да се замисли како да се состои од 0, 1, 2, ... честички, каде секоја честичка има енергија $h\nu$. Тогаш, ако е присутна една од овие честички, енергијата е $h\nu$, ако се присутни две, енергијата $2h\nu$ и така натаму. Овие честички на електромагнетното зрачење денес се викаат **фотони**. Наодот за дискретни спектри на атомите и молекулите може да се претстави како атом или молекула да создаваат фотон со енергија $h\nu$ кога се ослободува енергија со големина ΔE , каде $\Delta E = h\nu$.

Пример 8.1 Пресметување на бројот на фотони

Пресметај го бројот на фотони емитирани од жолта светилка од 100 W, за 1,0 s. Сметај дека брановата должина на жолтата светлина е 560 nm и претпостави стопроцентна ефикасност.

Метод Секој фотон има енергија $h\nu$, така што вкупниот број на фотони потребен за да се произведе енергија E е $E/h\nu$. За да се употреби оваа равенка, потребно е да се знае фреквенцијата на зрачењето (од $\nu = c/\lambda$) и вкупната енергија емитирана од светилката. Последново е зададено со производот од моќноста (P , во вати) и временскиот интервал во кој светилката е вклучена ($E = P\Delta t$).

Одговор Бројот на фотони е

$$N = \frac{E}{h\nu} = \frac{P\Delta t}{h(c/\lambda)} = \frac{\lambda P\Delta t}{hc}$$

Замената на податоците дава

$$N = \frac{(5,60 \times 10^{-7} \text{ m}) \times (100 \text{ J s}^{-1}) \times (1,0 \text{ s})}{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}) \times (2,998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})} = 2,8 \times 10^{20}$$

Забележи дека се потребни речиси 40 min за да се произведе 1 mol од овие фотони.

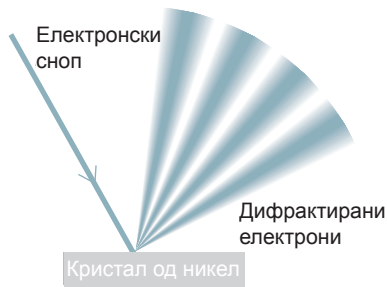
Пожелна практика За да се избегнат грешки поради заокружување и други нумерички грешки, најдобро е првин да се направат алгебарските преуредувања, а на крајот да се заменат бројните вредности во една единствена формула. Покрај тоа, аналитичкиот резултат може да се употреби и за други податоци, без да треба да се повторува целата пресметка.

Тест за самопроверка 8.1 Колку фотони емитира за 0,1 s монохроматски (една фреквенција), телеметар со моќност од 1 mW и бранова должина 1000 nm?

[5×10^{14}]

Дополнителни докази за корпускуларната природа на зрачењето се добиваат со мерење на енергиите на електроните произведени при **фотоелектричниот ефект**. Овој ефект е исфрлање на електрони од метали кога тие ќе се изложат на ултравиолетово зрачење. Експерименталните карактеристики на фотоелектричниот ефект се следниве:

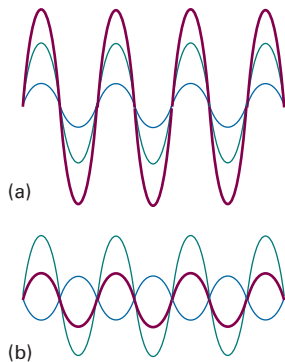
1. Ниту еден електрон не се исфрла, независно од интензитетот на зрачењето, доколку фреквенцијата не премине некоја гранична вредност, карактеристична за секој метал.
2. Кинетичката енергија на исфрлените електрони расте линеарно со фреквенцијата на упадното зрачење, но е независна од интензитетот на зрачењето.
3. Дури и при слаби интензитети на зрачењето, електроните се исфрлаат моментно, ако фреквенцијата е над граничната вредност.



Слика 8.15 Експериментот на Дејвисон и Џермер. Расејувањето на електронскиот сноп од кристал на никел покажува промена на интензитетот што е карактеристична за експеримент на дифракција, каде брановите интерферираат конструктивно и деструктивно во различни насоки.

Коментар 8.4

Карактеристично својство на брановите е дека тие интерферираат еден со друг, давајќи поголеми поместувања таму каде што бреговите и доловите коинцидираат што доведува до конструктивна интерференција, а помали поместувања таму каде што бреговите коинцидираат со доловите што доведува до деструктивна интерференција (види ја илустрацијата: (a) конструктивна, (b) деструктивна).



~~овој заклучок е во согласност со наодот (3). Практичната примена на рав. 8.11 е во тоа што таа овозможува техника за определување на Планковата константа, затоа што сите наклони на линиите прикажани на Сл. 8.13 се еднакви на h .~~

(b) Бранов карактер на честичките

Иако спротивно на долго одржаната бранова теорија на светлината, сфаќањето дека светлината се состои од честички било прифатено порано, па напуштено. Меѓутоа, ниту еден значаен научник не сметал дека материјата е брановидна. Сепак, експериментите што биле изведени во 1925 година ги присилиле луѓето да ја разгледаат оваа можност. Клучниот експеримент бил изведен од американските физичари Клинтон Дејвисон (Clinton Davison) и Лестер Џермер (Lester Germer) кои регистрирале дифракција на електрони од кристал (Сл. 8.15). Дифракцијата е интерференција предизвикана со објект на патот на брановите.* Во зависност од тоа дали интерференцијата е конструктивна или деструктивна, резултатот е област со засилен или ослабен интензитет на бранот. Успехот на Дејвисон и Џермер бил среќа во несреќа, затоа што еден случаен пораст на температурата довел до калење (англиски annealing) на нивниот поликристален образец и подредените рамнини од атоми функционирале како дифракциона решетка. Речиси во исто време Томсон (G.P. Thomson), работејќи во Шкотска, покажал дека сноп од електрони бил дифрактиран при минување низ тенка фолија од злато. Електронската дифракција е основата за специјалните техники на микроскопијата употребувана од биолозите и истражувачите во областа на материјалите (Влијание 18.1 и Оддел 20.4).

Дејвисон–Џермеровиот експеримент кој потоа бил повторуван со различни честички (вклучително α честички и молекулски водород), јасно покажува дека честичките имаат брановидни својства, а дифракцијата на неутрони е добро востановена техника за испитување на структурите и динамиката на кондензирани фази (види Поглавје 20). Веќе видовме и дека брановите на електромагнетното зрачење имаат честичковидни (корпускуларни) својства. Така, ова не води во средиштето на модерната физика. Кога се испитувани на атомска скала, класичните концепти на честичка и бран заемно се пропикнуваат: честичките имаат атрибути на бранови, а брановите – атрибути на честички.

Определен напредок кон координацијата на овие својства бил веќе направен од страна на францускиот физичар Луј Де Број/Брољ (Louis de Broglie) кога, во 1924 година, предложил дека било која честичка, не само фотон, што се движи со импулс p треба да има (во некоја смисла) бранова должина дадена со **Де Бројовата равенка**:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (8.12)$$

Значи, честичка со голем импулс има кратка бранова должина (Сл. 8.16). Макроскопските тела имаат толку големи импулси (бидејќи нивната маса е огромна) што дури и кога се движат бавно, нивните бранови должини се неизмерливо мали, па брановидните својства не може да се забележат.

Пример 8.2 Проценка на дебројовската бранова должина

Процени ја брановата должина на електроните што од состојба на мирување биле забрзани низ потенцијална разлика од 40 keV.

Метод За да се употреби Де Бројовата равенка, потребно е да се знае импулсот, p , на електроните. За да се пресмета импулсот, треба да се забележи дека енергијата што ја добива електронот забрзан низ потенцијална разлика V е eV, каде e е големината на неговиот полнеж. На крајот од периодот на забрзување, целата добиена енергија е во вид на кинетичка енергија, $E_k = p^2/2m_e$, па е можно да се определи p ставајќи дека $p^2/2m_e$ е еднакво на eV. Како и претходно, пресметката треба да се спроведе алгебарски до крај, пред да се заменат бројните вредности.

* На курсовите по физика може да се даде и многу попрецизна и поточна дефиниција на дифракцијата (заб. прев.).

Одговор Изразот $p^2/2m_e = eV$ при решавање дава $p = (2m_e eV)^{1/2}$; потоа, од равенката на Де Број, $\lambda = h/p$

$$\lambda = \frac{h}{(2m_e eV)^{1/2}}$$

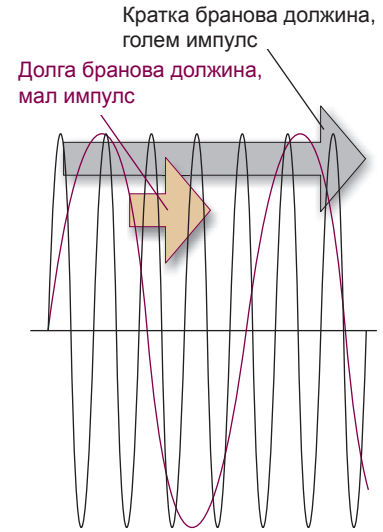
Замената на бројните вредности во податоците и на фундаменталните константи (види ја внатрешната страна на предната корица) дава

$$\lambda = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}}{\{2 \times (9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times (1,609 \times 10^{-19} \text{ C}) \times (4,0 \times 10^4 \text{ V})\}^{1/2}} = 6,1 \times 10^{-12} \text{ m}$$

каде е употребено $1 \text{ VC} = 1 \text{ J}$ и $1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$. Брановата должина од 6,1 pm е пократка од типичните должини на врските кај молекулите (околу 100 pm). Електроните забрзани на ваков начин се употребуваат при техниките на електронска дифракција за определување на молекулската структура (види Оддел 20.4).

Тест за самопроверка 8.2 Пресметај ја брановата должина за (а) неутрон со кинетичка енергија на транслаторно движење еднаква на kT при 300 K; (б) тениско топче со маса 57 g што се движи со 80 km/h. [(а) 178 pm; (б) $5,2 \times 10^{-34} \text{ m}$]

Сега мора да се заклучи дека не само што електромагнетното зрачење има својство коешто класично им се припишува на честички, туку и електроните (и сите други честички) имаат својства коишто класично им се припишуваат на брановите. Овој истовремено корпускуларен и бранов карактер на материјата и зрачењето е наречен **дуализам бран-честичка** (корпускуларно-бранов дуализам). Дуализмот напаѓа во срцето на класичната физика, каде честичките и брановите се третираат како целосно различни ентитети. Беше покажано и дека енергиите на електромагнетното зрачење и на материјата не може континуирано да се изменуваат и дека за мали објекти дискретноста на енергијата е од особено значење. Напротив, во класичната механика енергијата може да се изменува континуирано. Ваквото целосно затајување на класичната физика на малите објекти значи дека нејзините основни концепти биле погрешни. Било потребно да се формулира нова (квантна; заб. прев.) механика која ќе го заземе местото на класичната.



Слика 8.16 Илустрација на релацијата на Де Број меѓу импулсот и брановата должина. Бранот е поврзан со честичката (набрзо ќе се види дека овој бран е брановата должина* на честичката). Честичка со голем импулс има кратка бранова должина и обратно.



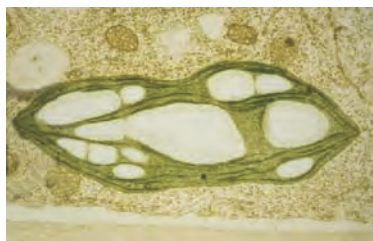
ВЛИЈАНИЕ ВРЗ БИОЛОГИЈАТА

И18.1 Електронска микроскопија

Основниот концепт за осветлување на мала површина од примерокот и собирање на светлината со микроскоп бил употребен долго години за прикажување мали обрасци. Сепак, *резолуцијата* на микроскопот, минималното растојание помеѓу два објекта што дава два одделни приказа, е од редот на брановата должина на светлината што е употребена како средство за испитување (види *Влијание И13.1*). Според тоа, конвенционалните микроскопи што ја употребуваат видливата светлина имаат резолуции во микрометарската област и се слепи за објекти на нанометарска скала.

Постои огромен интерес за развој на нови експериментални сонди за многу мали обрасци што не може да се испитуваат со традиционална микроскопија со светлина. На пример, нашето разбирање на биохемиските процеси, како ензимската катализа, свиткувањето на протеините и вметнувањето на DNA во клеточното јадро, би било многу поефикасно кога би било можно да се „видат“ на дело индивидуални биополимери чии размери се многу помали од брановите должини на видливата светлина. Една техника што често се употребува за прикажување објекти со нанометарска големина е *електронската микроскопија* во која сноп од електрони со добро дефинирана дебројовска бранова должина ја заменува светилката што се наоѓа во традиционалните микроскопи со светлина. Наместо стаклени или кварцни леќи, за фокусирање на снопот се употребуваат магнетни полиња. Во *трансмисионата електронска микроскопија* (англиски *transmission electron microscopy*, TEM), електронскиот сноп минува низ обрзецот и приказот се добива на екран. Во *скенирачката електронска микроскопија*

* Ова е многу несрекен избор на зборови, каде еден **бран**, кој е ентитет, се идентифицира со бранова должина, која е физичка величина (заб. прев.).



Слика 8.17 Приказ добиен со TEM на напречен пресек од растителна клетка, на кој се гледаат хлоропласти, органели одговорни за реакциите на фотосинтеза (Поглавје 23). Типичната должина на хлоропластите е 5 μm . (Приказот е добиен од Brian Bowes.)

(англиски *scanning electron microscopy*, SEM), се детектираат електроните расејани наназад од мала озрачена површина на образецот и електричниот сигнал се праќа на видео екран. Така, со скенирање на електронскиот сноп по целата површина, се добива нејзин приказ.

Како и во традиционалната микроскопија со светлина, брановата должина и можноста за фокусирање на упадниот сноп – во овој случај сноп од електрони – ја диктираат резолуцијата. Брановите должини на електроните кај типични електронски микроскопи може да бидат кратки и до 10 pm, но со магнетни леќи не е можно добро да се фокусираат електроните, така што, на крајот на краиштата, типичните резолуции на TEM и SEM инструментите изнесуваат околу 2 nm и 50 nm, соодветно. Следува дека електронските микроскопи не може да ги прикажат одделно индивидуалните атоми (чиј дијаметар изнесува околу 0,2 nm). Натаму, само некои примероци може да се набљудуваат под одредени околности. Мерењата мора да бидат изведувани во висок вакуум. За TEM мерења, примероците мора да бидат многу тенки напречни пресеци од образецот, а SEM мерењата мора да бидат вршени на суви примероци. Последица на овие услови е дека ниту една од овие техники не може да се примени за испитување на живи клетки. И покрај овие ограниченија, електронската микроскопија е многу корисна при испитување на внатрешната структура на клетките (Сл. 8.17).

Динамика на микроскопски системи

Квантната механика го поддржува дуализмот бран–честичка на материјата претпоставувајќи дека, наместо движење долж определен пат (траекторија), честичката е распределена низ просторот како бран. Оваа забелешка може да изгледа мистериозно: таа ќе биде објаснета во повеќе подробности подоцна. Математичката репрезентација на бранот што во квантната механика го заменува класичниот концепт на траекторија е наречена **бранова функција**, ψ (пси).

8.3 Шредингеровата равенка

Во 1926 година австрискиот физичар Ервин Шредингер (Erwin Schrödinger) предложил равенка за наоѓање на брановата функција на произволен систем. **Временски независната Шредингеровата равенка** за честичка со маса m што се движи во една димензија со енергија E е

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (8.13)$$

Членот $V(x)$ е потенцијалната енергија на честичката во точката x ; бидејќи вкупната енергија E е збир од потенцијалната и кинетичката енергија, првиот член мора да биде во врска (на начин што ќе биде разгледан подоцна) со кинетичката енергија на честичката; $\hbar$ (кое се чита h -прецртано или h -црта) е погодна модификација на Планковата константа:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054\,57 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad (8.14)$$

~~Како делумно образложение за обликот на Шредингеровата равенка, види ја Аргументацијата подолу. Дискусиите подоцна во поглавјево ќе помогнат да се надминат привидните произволности во овој комплициран израз. Засега, равенката треба да се смета како квантномеханички постулат. Различните начини на прикажување на Шредингеровата равенка, со вклучување на временска зависност на брановата функција и со нејзино проширување во повеќе димензии, се прикажани во Табела 8.1. Во Поголавје 9 ќе биде решена равенката за голем број важни случаи; во ова поглавје од интерес е, главно, нејзиното физичко значење, интерпретацијата на решенијата и разбирањето на кој начин таа имплицира квантирање на енергијата.~~

честичката во областа (Сл. 8.21). Меѓутоа, подоцна ќе биде покажано дека присуството на позитивни и негативни вредности на брановата функција е од големо *индиректно* значење, бидејќи тоа доведува до можност за конструктивна и деструктивна интерференција меѓу различни бранови функции.

Пример 8.3 Интерпретација на брановата функција

Во Поглавје 10 ќе биде покажано дека брановата функција на еден електрон во најниската енергетска состојба на водородниот атом е пропорционална на e^{-r/a_0} , каде a_0 е константа и r е растојанието од јадрото. (Забележи дека оваа бранова функција зависи само од растојанието, а не и од аголната положба во однос на јадрото.) Пресметај ги релативните веројатности за наоѓање на електронот во област со волумен $1,0 \text{ pm}^3$ која е мала дури и на скала на атомот, лоцирана (a) во јадрото; (b) на оддалеченост a_0 од јадрото.

Метод Областа од интерес е толку мала на скалата на атомот што може да се пренебрегне изменувањето на ψ внатре во неа и да се напише веројатноста, P , како да е пропорционална на густината на веројатноста (ψ^2 ; води сметка дека ψ е реална) пресметана во точката од интерес и помножена со волуменот за кој станува збор, δV . Значи, $P \propto \psi^2 \delta V$, каде $\psi^2 \propto e^{-r/a_0}$.

Одговор Во секој случај $\delta V = 1,0 \text{ pm}^3$. (a) Во јадрото, $r = 0$, па

$$P \propto e^0 \times (1,0 \text{ pm}^3) = (1,0) \times (1,0 \text{ pm}^3)$$

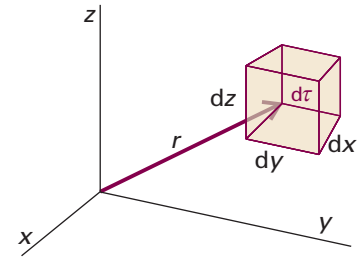
(b) На оддалеченост $r = a_0$ во произволна насока,

$$P \propto e^{-2} \times (1,0 \text{ pm}^3) = (0,14) \times (1,0 \text{ pm}^3)$$

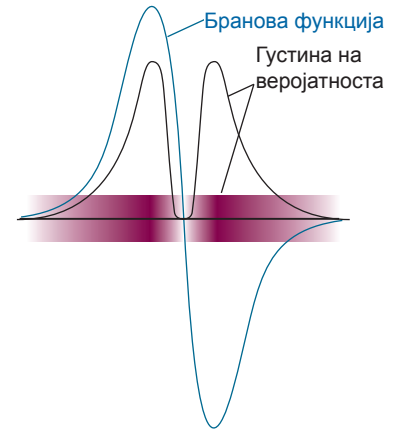
Според тоа, количникот на веројатностите е $1,0/0,14 = 7,1$. Забележи дека е поверојатно (за фактор 7) дека електронот ќе се најде при јадрото, отколку во волуменски елемент со иста големина, но лоциран на растојание a_0 од јадрото. Негативно наелектризиран електрон е привлечен од позитивно наелектризираното јадро и очекувано е да се најде блиску до него.

Пожелна практика Квадратот на брановата функција не е веројатност: тој е густина на веројатноста и (во три димензии) има димензии $1/\text{должина}^3$. Тој се претвора во (бездимензионална) веројатност кога ќе се помножи со волуменот. Во општ случај, предвид треба да се земе изменувањето на амплитудата на брановата функција во рамките на волуменот од интерес, но тука се претпоставува дека волуменот е толку мал што промената на ψ во областа може да се пренебрегне.

Тест за самопроверка 8.3 Брановата функција за електрон во неговата најниска енергетска состојба во јонот He^+ е пропорционална на e^{-r/a_0} . Повтори ја пресметката за овој јон. Некаков коментар? [55; покомпактна бранова функција]



Слика 8.20 Борновата интерпретација на брановата функција во тридимензионален простор имплицира дека веројатноста за наоѓање на честичката во волуменски елемент $d\tau = dx dy dz$ во некоја точка $\mathbf{r}$ е пропорционална на производот од $d\tau$ и вредноста на $|\psi|^2$ во таа точка.



Слика 8.21 Знакот на брановата функција нема директно физичко значење: и позитивните и негативните вредности соодветствуваат на иста распределба на веројатноста (онака како што е дадена со квадратот на модулот на ψ и претставена со густината на засенчувањето).

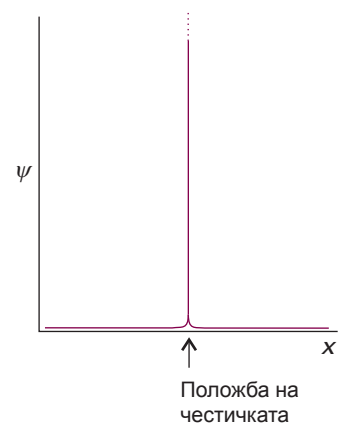
8.6 Принцип на неопределеност

видовме дека положбата на честичката опишана со оваа бранова функција е целосно непредвидлива. Со други зборови, ако импулсот е прецизно определен, не е возможно да се предвиди положбата на честичката. Ова тврдење е половина од специјалниот случај на **Хајзенберговиот принцип на неопределеност**, еден од најпрославените резултати на квантната механика:

Не е возможно истовремено да се определат, со произволна прецизност, и импулсот и положбата на една честичка.

Пред натаму да се дискутира принципот, мора да се утврди и втората половина: ако е точно позната положбата на честичката, тогаш не може ништо да се каже за импулсот. Аргументот ја користи идејата брановата функција да се смета како суперпозиција од сопствени функции и се елаборира на следниов начин.

Ако е познато дека честичката е на определено место, нејзината бранова функција таму мора да биде голема, а да биде нула секаде на друго место (Сл. 8.30).



Слика 8.30 Брановата функција за честичка со добро дефинирана положба е функција со остар пик која има амплитуда нула секаде, освен во точката што ја дава положбата на честичката.